Числовые последовательности. Способы задания числовых последовательностей

Если каждому натуральному числу *n*поставлено в соответствие некоторое действительное число*xn* ,  то говорят, что задана **числовая последовательность**

*x*1, *x*2, … *xn* , …

Число *x*1 называют членом последовательности ***с номером 1*** или **первым членом последовательности**, число *x*2 - членом последовательности ***с номером 2*** или **вторым членом последовательности**, и т.д. Число*xn* называют **членом последовательности с номером *n***.

Существуют два способа задания числовых последовательностей – с помощью **формулы общего члена последовательности** и с помощью **рекуррентной формулы**.

Задание последовательности с помощью **формулы общего члена последовательности** – это задание последовательности

*x*1, *x*2, … *xn* , …

с помощью формулы, выражающей зависимость члена*xn* от его номера *n*.

***ПРИМЕР 1***. Числовая последовательность

1, 4, 9, … *n*2 , …

задана с помощью формулы общего члена

*xn* = *n*2,       *n* = 1, 2, 3, …

Задание последовательности с помощью формулы, выражающей член последовательности *xn* через члены последовательности с предшествующими номерами, называют заданием последовательности с помощью **рекуррентной формулы**.

***ПРИМЕР 2*** (последовательность Фибоначчи - это такая последовательность, у которой ***первые два члена равны*1**, а ***каждый член***, начиная с третьего члена, ***равен сумме двух предыдущих членов***.)

Числовая последовательность

1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55, …

может быть задана с помощью рекуррентной формулы

xn= xn – 1 + xn – 2,       n > 2 ,

с начальными условиями

x1= 1,       x2 = 1 .

### Возрастающие и убывающие последовательности

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1***

x1,  x2, … xn , …

называют **возрастающей последовательностью,** если каждый член этой последовательности **больше** предшествующего члена.

Другими словами, для всех   n = 1, 2, 3, …   выполнено неравенство

xn + 1 > xn

***ПРИМЕР 3***. Последовательность натуральных чисел

1, 2, 3, … n, …

является **возрастающей последовательностью**.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.***

x1,  x2, … xn , …

называют **убывающей последовательностью,** если каждый член этой последовательности **меньше** предшествующего члена.

Другими словами, для всех   n = 1, 2, 3, …   выполнено неравенство

xn + 1 < xn

***ПРИМЕР 4***. Последовательность

возрастающие последовательности убывающие последовательности монотонные последовательности

заданная формулой

возрастающие последовательности убывающие последовательности монотонные последовательности

является **убывающей последовательностью**.

***ПРИМЕР 5***. Числовая последовательность

1, – 1, 1, – 1, …

заданная формулой

xn = (– 1)n,       n = 1, 2, 3, …

не является **ни возрастающей, ни убывающей** последовательностью.

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.***Возрастающие и убывающие числовые последовательности называют **монотонными последовательностями**.

### Ограниченные и неограниченные последовательности

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.***Числовую последовательность

x1,  x2, … xn , …

называют **ограниченной сверху,** если существует такое число *M,*что каждый член этой последовательности **меньше** числа *M*.

Другими словами, для всех   n = 1, 2, 3, …   выполнено неравенство

*xn < M*

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.***Числовую последовательность

x1,  x2, … xn , …

называют **ограниченной снизу,** если существует такое число *m,*что каждый член этой последовательности **больше** числа *m*.

Другими словами, для всех   n = 1, 2, 3, …   выполнено неравенство

*xn > m*

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.***Числовую последовательность

x1,  x2, … xn , …

называют **ограниченной,** если она **ограничена и сверху, и снизу.**

Другими словами, существуют такие числа *M*и *m,*что для всех   n = 1, 2, 3, …   выполнено неравенство

*m < xn < M*

***ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.***Числовые последовательности, которые **не являются ограниченными**, называют **неограниченными последовательностями**.

***ПРИМЕР 6***. Числовая последовательность

1, 4, 9, … n2 , …

заданная формулой

xn = n2,       n = 1, 2, 3, … ,

**ограничена снизу**, например, числом 0. Однако эта последовательность **неограничена сверху**.

***ПРИМЕР 7***.  Последовательность

ограниченные снизу последовательности ограниченные сверху последовательности ограниченные последовательности неограниченные последовательности

заданная формулой

ограниченные снизу последовательности ограниченные сверху последовательности ограниченные последовательности неограниченные последовательности

является **ограниченной последовательностью**, поскольку для всех   n = 1, 2, 3, …   выполнено неравенство

ограниченные снизу последовательности ограниченные сверху последовательности ограниченные последовательности неограниченные последовательности